ECOLE SUPERIEURE DE GESTION
CONCOURS D'ENTREE 1991

MATHEMATIQUES I
FORMULE GENERALE
DUREE : 4 HEURES
COEFFICIENT : 3

I - EXERCICE DE PROBABILITES (5 points)
A - QUESTION PRELIMINAIRE

q désigne un nombre réel, tel que $o < q < 1$

a) Calculer pour $n \geqslant 2$ les sommes : $\sum_{k=1}^{k=n} k q^{k-1}$ $\sum_{k=2}^{k=n} k(k-1) q^{k-2}$

b) En déduire les sommes : $\sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1}$ $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2}$

B - On dispose d'une urne U dont la proportion du nombre de boules blanches est $\frac{2}{3}$ et la proportion du nombre de boules noires est $\frac{1}{3}$ et d'une cible C.

On considère alors le jeu suivant : un joueur tire une première fois sur la cible C : s'il l'atteint il a gagné la partie ; sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U ; s'il obtient une boule noire, il a perdu la partie, sinon il remet la boule blanche dans l'urne et retire sur la cible. S'il l'atteint, il a gagné la partie ; sinon il retire au hasard une boule de l'urne ; s'il obtient une boule noire, il a perdu la partie ; sinon il remet la boule blanche dans l'urne et retire sur la cible et ainsi de suite...

Soit $p \in [o,1]$ la probabilité qu'a le joueur d'atteindre la cible lors d'un tir. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient A_n , B_n , A, B, D les évènements suivants :

A_n "le joueur gagne la partie à l'issue du n ième tir" , B_n " le joueur perd la partie à l'issue du n ième tir"

A " le joueur gagne la partie" B "le joueur perd la partie" D " la partie ne s'arrête pas"

1) Calculer en fonction de n et p les probabilités de A_n et B_n

2) Calculer, en fonction de p, les probabilités de A, B, D

3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de coups nécessaires pour que la partie s'arrête
a - Déterminer la loi X
b - Calculer l'espérance de X
c - Calculer la variance et l'écart type de X

4) Sachant que le joueur a perdu la partie, calculer la probabilité que ce soit à l'issue du n ième tir ($n \in N^*$) (on supposera dans cette question $p \neq 1$).

5) Etudier en fonction des valeurs de p, le fait que le joueur ait plus ou moins de chance de gagner à ce jeu.

A SUIVRE

II - EXERCICE D'ALGEBRE (6 points)

On désigne par $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 4 à éléments dans $\mathbb{R}$ et par $\mathcal{C}$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

On dira que 2 matrices M et M' de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ permutent si M x M' = M' x M.

On considère l'ensemble G des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui ont la forme suivante:

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} & b \\ 0 & 1 & a & c \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ où a,b,c sont trois nombres réels

1)
a - Montrer que G est stable pour la multiplication matricielle
b - Montrer que I appartient à G
c - Montrer que tous les éléments de G sont inversibles et donner l'inverse de M (a,b,c,)

2)
a - Calculer M (a,b,c) M(a',b',c') − M(a',b',c') M(a,b,c,)
b - En déduire les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux matrices de G permutent.

3) Soit F l'ensemble des applications linéaires f(a,b,c) de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ de matrice associée M (a,b,c) dans la base canonique $\mathcal{C}$ que l'on notera M .
Montrer que F laisse invariant le sous espace vectoriel E de dimension trois engendré par les trois premiers vecteurs de la base canonique . $\mathcal{C}$

4) Soit U_M la matrice :

$$U_M = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ où a est un réel

On note h l'application qui associe à toute matrice M de G, la matrice U_M

a - Déterminer l'ensemble H des matrices M de G telles que $h(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b - Montrer que l'ensemble des matrices de la forme N − I, où N appartient à H forme un espace vectoriel.

5) Soit M une matrice de G, N une matrice de H , verifier que $M^{-1} \times N \times M$ est une matrice de H ; M^{-1} désignant la matrice inverse de M.

6) Comparer deux matrices M et M' de G, telles que : $M M' = M' M$
et $h(M) = h(M')$

Tournez la page S.V.P.

III - PROBLEME D'ANALYSE (9 points)

A - L'objectif de cette première partie est de rechercher toutes les fonctions F d'une variable réelle qui vérifient l'équation.

(1) $F(x+1) - F(x) = G(x)$ où G(x) est une fonction donnée

1) Montrer que si deux fonctions F_1 et F_2 vérifient l'équation (1), leur différence est une fonction C, périodique, de période 1.

2) On se place dans le cas où la fonction G(x) est un polynôme et on cherche parmi les fonctions F solutions de l'équation (1) celles qui sont aussi des polynômes. Quelle est dans ce cas la fonction C?

Montrer que si des fonctions f_i sont telles que $f_i(x+1) - f_i(x) = x^i$ (où i est un entier ≥ 0 quelconque)

tout polynôme F vérifiant (1) avec

$G(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \lambda_i x^i$ (où $\lambda_i \in \mathbb{R}$) s'exprime sous la forme : $F(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \lambda_i f_i(x) + K$

où K est une constante réelle

B - Le but de cette seconde partie est d'étudier la famille de fonctions g_λ de la variable réelle x

définies par : $g_\lambda(x) = \dfrac{x e^{\lambda x}}{e^x - 1}$

C_λ étant la courbe représentative de g_λ

1) Comparer la position relative des courbes C_λ et $C_{1-\lambda}$

2) Suivant la valeur de λ, préciser les branches infinies de C_λ quand x tend vers l'infini $(+\infty$ et $-\infty)$ et donner la position de la courbe par rapport à son asymptote, s'il y en a une.

3)

a - Montrer que g_λ peut-être prolongée par continuité en x = 0.

b - Donner le développement limité à l'ordre 2 au point x = 0 de $g_\lambda(x)$. En déduire les tangentes aux courbes C_λ au point d'abscisse x = 0 et la position de chaque courbe par rapport à sa tangente.

4) Montrer que la dérivée $g'_\lambda(x)$

a - est continue sur $\mathbb{R}$ (on utilisera la convention $g'_\lambda(0) = \lim_{x \to 0} g'_\lambda(x)$)

b - garde un signe constant pour $\lambda \notin]0,1[$

c - s'annule et change de signe une seule fois pour $\lambda \in]0,1[$.

5) Donner sur un même graphique l'allure générale des courbes C_λ. On tracera toutefois les courbes avec précision au voisinage de x = 0 et on placera l'asymptote quand elle existe. On étudiera en particulier les courbes limites, correspondant à $\lambda = 0$; $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$

FIN

ECOLE SUPERIEURE DE GESTION
CONCOURS D'ENTREE 1991

EPREUVE MATHS II
FORMULE GENERALE
DUREE : 3 HEURES
COEFFICIENT : 2

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$

On suppose que p est la probabilité d'être atteint d'une maladie A non contagieuse par tout individu.

Dans la salle d'attente du cabinet du médecin, il y a N personnes $(N \geq 2)$

I. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de ces N personnnes ayant la maladie A

1. Déterminer la loi de la probabilité de X

2. Calculer le moment d'ordre 2 de X

II. Le médecin fait rentrer dans son cabinet ces N personnes, une à une, en les choisissant au hasard pour la consultation (les différents ordres de passages possibles étant équiprobables)

Soit Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première personne consultée ayant la maladie A

Soit i un entier naturel tel que $1 \leq i \leq N$ et soit $j \in Y(\Omega)$

On désigne par $P[Y = j / X = i]$ la probabilité de l'évenement $(Y = j)$ sachant $(X = i)$

1).

a. Calculer $P[Y = j / X = 1]$

b. On désigne par Y_1 la variable aléatoire Y conditionnée par $(X = 1)$
Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y_1

2)

a. $\forall j \in Y(\Omega)$ calculer $P[Y = j / X = 2]$

b. On désigne par Y_2 la variable aléatoire conditionné par $(X = 2)$
Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y_2

c. Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant l'inégalité de Bienyamé Tchebychev déterminer un majorant de la probabilité de l'évenement $|3Y - (N + 1)| \geq \varepsilon$

3) Calculer $\forall j \in Y(\Omega)$ $P[Y = j / X = i]$

4) On suppose $N = 4$ et $p = \frac{1}{2}$

a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y)
on admettra que l'évenement $(X = 0)$ entraîne l'évenement $(Y = 0)$
on présentera la loi conjointe par un tableau à double entrée

b. En déduire la loi de la probablité de Y

c. Calculer la covariance du couple (X, Y)

5) On définit la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la deuxième personne consultée ayant la maladie A

a .Calculer $\forall k \in Z(\Omega)$ $P[Z = k / X = 2]$

b . On désigne par Z_2 la variable aléatoire Z conditionnée par l'évenement $(X = 2)$

Déterminer par un tableau à double entrée la loi conjointe du couple (Y_2, Z_2) lorsque $N = 4$